

CLASA a XI-a

Subiectul I.

Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+ax^2}}$, $a > 0$. Calculați:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \sum_{k=1}^n \underbrace{(fofo \dots of)}_{\text{de } k \text{ ori } f}(x) \right)$$

unde “o” reprezintă compunerea funcțiilor).

Subiectul II.

Să se rezolve ecuația $AX^2 + BX + C = O_2$, unde $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$ și $\det(X) = 1$.

*N. Păun, Râmnicu Vâlcea
(problema 9495, GM/1969)*

Subiectul III.

Să se determine toate matricele $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea că

$$\det \left(\sum_{i=1}^n A^i \right) = \sum_{i=1}^n \det(A^i), \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Subiectul IV.

Spunem că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ are o ”creștere rapidă” dacă și numai dacă f este strict crescătoare, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ și $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{e^x} = \infty$

a) Dați exemplu de o funcție cu o creștere rapidă și de una ce nu are o creștere rapidă

b) Calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x+n) - f(x)}{e^x}$, unde $n \in \mathbb{Z}$ și $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție cu creștere rapidă.