COLEGIUL NAȚIONAL INOCHENTIE MICU CLAIN

romania2019.eu

CONCURSUL DE MATEMATICĂ MIRCEA GANGA

EDIȚIA A X-A

BLAJ, 11 MAI 2018

# CLASA a X-a

## Subiectul I.

Să se rezolve, în $\mathbb{R}$, următorul sistem de ecuații:

$$\begin{cases} x^y = y^x \\ \dfrac{x^x}{y^y} = y^{x+y} \end{cases}$$

*G.M.3/1961 R.Bîrzan, student, Cluj*

## Subiectul II.

Fie $a_1; a_2; \dots\dots; a_n$ numere reale mai mari ca 1.

Arătați că are loc inegalitatea:

$$\prod_{k=1}^{n} \log_{\frac{1}{a_k}} \frac{2}{a_{k+1} + a_{k+2}} \geq 1$$

unde $a_{n+1} = a_1$ și $a_{n+2} = a_2$

## Subiectul III.

Se consideră numerele complexe $z_k$ cu $|z_k| = 1, \quad \forall\, k = \overline{1;n}; \;\; n \in \mathbb{N}; \;\; n \geq 2$

a) Arătați că:

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} z_k + \sum_{k=1}^{n} z_k^{-1}}{\prod_{k=1}^{n} z_k + \prod_{k=1}^{n} z_k^{-1}} \in \mathbb{R}$$

b) Arătați că $\left(z_1 + \frac{1}{z_1}\right)^1 + \left(z_2 + \frac{1}{z_2}\right)^2 + \dots + \left(z_n + \frac{1}{z_n}\right)^n \leq 2^{n+1} - 2$

## Subiectul IV

Câte submulțimi de 3 elemente de forma $\{q^s; q^{s+1}; q^{s+2}\}$, $q, s \in \mathbb{N}$ are mulțimea

$$A = \{1; 2; \dots; n\}; n \in \mathbb{N}^*; \; n \geq 3$$