COLEGIUL NAȚIONAL
INOCHENTIE MICU CLAIN
CONCURSUL DE MATEMATICĂ
MIRCEA GANGA
EDIȚIA A IX-A
BLAJ, 12 MAI 2018

CONCURSUL DE MATEMATICĂ „MIRCEA GANGA”

CLASA a XII-a

Subiectul I.

Se consideră $f_n: [0,\infty) \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{x^n}{ax^2+bx+c}, n \in \mathbb{N}^*, unde\ a, b, c$ numere reale strict pozitive.

a) Calculați $\int_0^1 f_1(x)\,dx$ pentru $a = b = c = 1$

b) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \int_0^1 f_n(x)dx$

c) Calculați $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^{-n-1} \int_0^x f_n(t)dt$

Subiectul II.

Fie funcțiile $g: [0,\pi] \to [0,\pi]$, $g(x) = \sin x - x\cos x$ și $f: [0,\pi] \to [0,\pi]$ ce verifică relația $sin(f(x)) - f(x)cos(f(x)) \geq x, \forall x \in [0,\pi]$.

a) Demonstrați că g este inversabilă

b) Demonstrați că $\int_0^\pi f(x)dx \geq \pi^2 - 4$

Subiectul III.

Fie n un număr natural impar $n \geq 3$ și $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea

$$\Big(\underbrace{f\circ f\circ \ldots \circ f}_{n\ ori}\Big)(x) = \Big(\underbrace{f\circ f\circ \ldots \circ f}_{n-1\ ori}\Big)(x) + x, \forall x \in \mathbb{R}$$

1. Să se arate că f este injectivă
2. Să se calculeze $f(0)$
3. Arătați că există o astfel de funcție.

Subiectul IV.

Fie $(A, +,\cdot)$ un inel și x, y elemente inversabile ale inelului și diferite de 1 ce au proprietatea că $yx^{-1}y = -x - y$.

a) Demonstrați că $x + y$ este inversabil în inelul A și aflați inversul său

b) Dați exemplu de un inel și de două elemente x și y cu proprietatea din enunț.