COLEGIUL NAȚIONAL INOCHENTIE MICU CLAIN
CONCURSUL DE MATEMATICĂ MIRCEA GANGA
EDIȚIA A IX-A
BLAJ, 12 MAI 2018

CONCURSUL DE MATEMATICĂ „MIRCEA GANGA”

CLASA a XI-a

Subiectul I.

Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 < 1$. Demonstrați că $A + I_2$ este inversabilă.

Subiectul II.

Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ și $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, cu proprietatea că $\det(A + X) = detA + detX$, $\forall\, X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Arătați că $A^* = O_n$, unde A^* este adjuncta matricei A.

Subiectul III.

Fie $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$ o funcţie care satisface simultan condiţiile:

(i) $f(x^5) = 5 \cdot f(x), (\forall) x > 0$;

(ii) f este derivabilă pe $(0, \infty)$, cu f' continuă în $x = 1$ şi $f'(1) = 1$.

a) Să se arate că $x \cdot f'(x) = \sqrt[5]{x} \cdot f'\left(\sqrt[5]{x}\right), (\forall) x > 0$.

b) Să se determine funcţia f.

Subiectul IV.

Fie $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ și șirul $(x_n)_{n \geq 1}$, definit prin

$$x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ și } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} = \sqrt[k]{x_{n+1}}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Să se calculeze: $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n^k}{x_n^{k+1}}$.