COLEGIUL NAȚIONAL INOCHENTIE MICU CLAIN

CONCURSUL DE MATEMATICĂ MIRCEA GANGA

EDIȚIA A IX-A

BLAJ, 12 MAI 2018

CONCURSUL DE MATEMATICĂ „MIRCEA GANGA”

CLASA a X-a

Subiectul I.

Demonstrați că are loc inegalitatea:

$$\log_3 8 < 1 + \sqrt[3]{3} + 3\sqrt[9]{3} - 3\sqrt[9]{9}$$

Subiectul II.

Fie $x_1, x_2, \dots, x_n$ abscisele a n puncte distincte pe o axă, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ și $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcția cu proprietatea următoare:

$$f(x) = \begin{cases} +1, & dacă\ x > 0, \\ -1, & dacă\ x < 0. \end{cases}$$

Să se calculeze

$$S = \sum_{p} \frac{1 + f(x_n - x_{n-1})}{2} \cdot \frac{1 + f(x_{n-1} - x_{n-2})}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{1 + f(x_2 - x_1)}{2}$$

unde suma se ia asupra tuturor permutărilor P ale celor n puncte pe o dreaptă.

Problema 3180, G.M. 5/1958, A. Hristev

Subiectul III.

Fie $z \in \mathbb{C}$ un număr complex cu proprietatea că $|z+1| > |z|$. Demonstrați că are loc inegalitatea:

$$|z+2|^n \geq \sqrt{n}|z|, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Subiectul IV.

Numerele reale $x_1, x_2, \dots, x_n$, $n \geq 2$, verifică relația ${x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2 = k, k > 0$. Să se arate că are loc inegalitatea:

$${x_1}^4 + {x_2}^4 + \cdots + {x_n}^4 + n(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 \leq k(n-1)^2 + n(n-1) + k(k+1).$$