COLEGIUL NATIONAL INOCHENTIE MICU CLAIN BLAJ
CONCURSUL DE MATEMATICA MIRCEA GANGA
Editia a VIII-a
BLAJ, 20 Mai 2017

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ”MIRCEA GANGA”

Subiect – CLASA a XII-a

Subiectul I.

Fie $I_n = \lim\limits_{p\to\infty} \sum_{k=1}^{p} \frac{k^n}{p^{n-1}\cdot k^2 + 2\cdot p^n \cdot k + 3\cdot p^{n+1}}$, $n, p \in \mathbb{N}^*$.

a) Calculați I_1

b) Deduceți o relație de recurență între I_n; I_{n+1} și I_{n+2}.

c) Calculați

$\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot I_n$, unde $n \in \mathbb{N}, n > 2$.

Subiectul II.

a) Dacă (G, ·) este un grup multiplicativ de matrici atunci toate matricile din G sunt pătratice și de același tip.

b) Demonstrați că nu există un grup (G, ·) multiplicativ de matrici în care

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2017 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ să fie un element al grupului.

Subiectul III.

Să se calculeze:

$$I_n = \int_0^1 \frac{4x^3 - 6x^2 + 8x - 3}{(x^2 - x + 1)^n} dx \text{ , știind că } n \in \mathbb{N}^*.$$

Problema 17036, G.M. 1/1978

MARCEL CHIRIȚĂ, București

Subiectul IV.

Fie $f \in \mathbb{R}[X]$, polinom real de grad n, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, cu rădăcini reale și distincte două câte două.

Arătați că:

$$f''(x) \cdot f(x) - \left(f'(x)\right)^2 + f'(x) \cdot f(x) - nf^2(x) \leq 0,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R} - \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.