COLEGIUL NATIONAL INOCHENTIE MICU CLAIN BLAJ

ALBA

CONCURSUL DE MATEMATICA MIRCEA GANGA

Editia a VIII-a

BLAJ, 20 Mai 2017

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ”MIRCEA GANGA”

Subiect – CLASA a XI-a

Subiectul I.

Fie șirul $(x_n)_{n\ge 1}$ definit astfel $\begin{cases} x_1 \in (4;5) \\ x_{n+1} = x_n^2 - 8x_n + 20, \ \forall n \ge 1 \end{cases}$.

a) Demonstrați că șirul $(x_n)_{n\ge 1}$ este convergent și aflați limita sa.

b) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{4\left(\sqrt{x_{n+1}} - 2\right)}{\left(x_n - 4\right)^2} \right)^{\frac{1}{(x_n-4)^2}}$.

Subiectul II.

Fie $(a_n)_{n\ge 1}$ o progresie aritmetică cu primul termen $a_1 > 0$ și rația $r > 0$. Să se calculeze

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\prod\limits_{1\le i<j\le n} a_i^{\ln a_j} \right)^{\frac{1}{(n\ln n)^2}}$.

Subiectul III.

a) Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Calculați $A^{20} + A^{201} + A^{2017}$.

b) Să se demonstreze că există o infinitate de matrice $X \in M_2(\mathbb{Q})$ astfel încât $X^3 = I_2$.

Subiectul IV.

Fie matricele $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea $A^2 + B^2 = AB$. Demonstrați că $(AB - BA)^2 = O_2$.