COLEGIUL NATIONAL INOCHENTIE MICU CLAIN BLAJ

CONCURSUL DE MATEMATICA MIRCEA GANGA

Editia a VIII-a

BLAJ, 20 Mai 2017

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ”MIRCEA GANGA”

Subiect – CLASA a X-a

Subiectul I.

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+log_3(1+3^x)$

a) Rezolvați ecuația $f(x)=0$;

b) Demonstrați că f este inversabilă și că $f^{-1}(x)<f(x),\ \forall\, x\in\mathbb{R}$;

c) Demonstrați că $f(k)\in\mathbb{R}-\mathbb{Q},\ \ \forall\, k\in\mathbb{N}$.

Subiectul II.

a) Demonstrați că : $C_n^{k+1}=\frac{n-k}{k+1}C_n^k$;

b) Să se arate că:

$$\frac{3-n}{2}C_n^1+\frac{5-n}{3}C_n^2+\cdots+\frac{n-1}{n}C_n^{n-1}+C_n^n=C_n^1.$$

Problema 8779, G.M.3/1968

GH. CAUTEȘ, Adjud

Subiectul III.

Fie $\alpha\in(1,4]$ și x, y, z numere reale nenule. Arătați că:

$$\frac{x(x+y)}{\alpha x^2+xy+y^2}+\frac{y(y+z)}{\alpha y^2+yz+z^2}+\frac{z(x+z)}{\alpha z^2+xz+x^2}\leq\frac{3}{\alpha-1}.$$

Subiectul IV.

Fie $\varepsilon=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ și numărul $z\in\mathbb{C}$, care verifică egalitatea:

$$\big|z-|z|\big|+\big|z-\mathcal{E}|z|\big|+\big|z-\mathcal{E}^2|z|\big|=3\sqrt{2}\ .$$

a) Arătați că $\mathcal{E}^3=1$ și $\mathcal{E}^2+\mathcal{E}+1=0$.

b) Arătați că $|z|\geq 1$.