COLEGIUL NATIONAL INOCHENTIE MICU CLAIN BLAJ

ALBA

CONCURSUL DE MATEMATICA MIRCEA GANGA

Editia a VIII-a

BLAJ, 20 Mai 2017

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ”MIRCEA GANGA”

Subiect – CLASA a IX-a

Subiectul I.

Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \left[\dfrac{x+2}{3}\right] = \dfrac{y-3}{2} \\ \left[\dfrac{y+1}{3}\right] = \dfrac{x+3}{2} \end{cases},$$

unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului a.

Problema 10853 GM1/1978   Gh. Schneider, student București

Subiectul II.

a) Există numerele reale a și b și un număr natural n astfel încât $\begin{cases} \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = n \\ \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} = n+1 \\ \dfrac{1}{a^3} + \dfrac{1}{b^3} = n+3 \end{cases}$? Justificați!

b) Determinați două numere $x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ astfel încât $\dfrac{1}{x^n} + \dfrac{1}{y^n} \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Subiectul III.

În $\triangle ABC$ se consideră punctele M, N, P astfel încât $\overrightarrow{AM} = -\dfrac{2m}{2m+1}\overrightarrow{BM}$; $\overrightarrow{BP} = (2m+1)\overrightarrow{CP}$; $\overrightarrow{AC} = \dfrac{2m+1}{2m}\overrightarrow{AN}$. Să se determine $m \in (0; +\infty)$ astfel încât punctele M, N, P să fie coliniare.

Subiectul IV.

Fie $\triangle ABC$ echilateral și $\triangle A'B'C'$ astfel încât $[AA'] \equiv [BB'] \equiv [CC']$ și $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$.
Demonstrați că $\triangle A'B'C'$ este echilateral, având același centru de greutate cu al triunghiului ABC.