COLEGIUL NATIONAL INOCHENTIE MICU CLAIN BLAJ

CONSILIUL JUDETEAN ALBA

CONCURSUL DE MATEMATICA MIRCEA GANGA

Editia a VII-a

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ”MIRCEA GANGA”

Subiect – CLASA a XII-a

Subiectul I.

Fie polinoamele $f = x^m + px^n + q$ și $g = x^m + qx^n + p,\ f, g \in \mathbb{C}[x], cu\ p \neq q$. În ce caz polinoamele au o rădăcină comună? Pentru $m = 5$ și $n = 3$ aflați rădăcina comună.

Ion Ionescu, problema 3168, GM8/1923

Subiectul II.

Fie

$$f: (1;\ \infty) \to \mathbb{R}; f(x) = \frac{1}{x(x^8 - 1)}$$

a) Să se determine mulțimea primitivelor funcției f.

b) Arătați că

$$\frac{1}{x^9} < \frac{1}{x(x^8 - 1)} < \frac{1}{x^2 + 1}\ , (\forall) x \in [2; 4]$$

c) Demonstrați că

$$\frac{255}{2^{19}} < \int_2^4 f(x)dx < arctg\frac{2}{9}$$

Subiectul III.

a) Să se calculeze:

$$\int_{-n}^{n} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{e^x + 1} dx, n \in \mathbb{N}^*.$$

b) Să se calculeze:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} \int_{-n}^{2n} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{e^x + 1} dx\, .$$

Subiectul IV.

Fie $(K,\ +,\ \cdot)$ un corp comutativ cu 0, respectiv 1 elementele neutre. Dacă $a, b, c \in K$ astfel încât $a \cdot b \cdot c = 1$ și $a + b + c = a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a$, atunci:

a) calculați: $(1 - a)(1 - b)(1 - c)$

b) demonstrați că cel puțin unul dintre elementele a, b, c este egal cu 1;

c) arătați că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, este verificată egalitatea: $a^n + b^n + c^n = a^n \cdot b^n + b^n \cdot c^n + c^n \cdot a^n$