COLEGIUL NATIONAL INOCHENTIE MICU CLAIN BLAJ
CONSILIUL JUDETEAN ALBA
CONCURSUL DE MATEMATICA
MIRCEA GANGA
Editia a VII-a
BLAJ 7 Mai 2016

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ”MIRCEA GANGA”

Subiect - CLASA a X-a

Subiectul I.

Se consideră mulțimile:

$$A = \{x \in \mathbb{R} |\ x + log_{2016}x = 2017 - 2016^x\}$$

$$B = \left\{x \in \mathbb{R} |\ log_{\frac{1}{2}}\left(log_2(5 - x^2)\right) = -1\right\}$$

Să se determine $A \cap B$.

Subiectul II.

Fie $a, b \in \mathbb{R}^*$ pentru care expresia

$$E = \frac{\left(\frac{a+bi}{a-bi}\right)^m - \left(\frac{a-bi}{a+bi}\right)^m}{\left(\frac{b+ai}{b-ai}\right)^m - \left(\frac{b-ai}{b+ai}\right)^m}$$

are sens.

Să se determine $m \in \mathbb{Z}$, astfel încât E=1, unde $i^2 = -1$.

Marian Țarină, GM 7-1951

Subiectul III.

Fie ecuația:

$$sinx = \frac{4 - 3a^2}{a^3}$$

a) Rezolvați ecuația pentru $a = -2$ și $a = 2$

b) Demonstrați că ecuația $sinx = \frac{4-3a^2}{a^3}$ are soluții $\forall a \in \mathbb{R}$, cu $|a| \geq 1$.

Subiectul IV.

Fie k un număr natural fixat, $k \geq 1$. Să se determine funcțiile $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, pentru care avem $f(1) = k + 1, f(2) = \frac{k+2}{2}, f(3) = \frac{k+3}{3}, \dots, f(k-1) = \frac{2k-1}{k-1}, f(k) = 2$ și

$f(n + k) + \frac{1}{f(n)} = 2$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.