CONCURSUL DE MATEMATICĂ ”MIRCEA GANGA”

Subiect - CLASA a XII-a

Subiectul I.

Fie $a,c\in \mathbb{R}$, $b\in \overline{\mathbb{R}}$, intervalul $G_{a,b} = (a,b)$ și legea de compoziție definită pe $G_{a,b}$ astfel: $x * y = xy - ax - ay + a^2 + c,\ \ \forall x,y \in G_{a,b}$.

Să se arate că:

a) Legea "$*$" este asociativă dacă și numai dacă $a = c$;

b) $(G_{a,b}; *)$ este grup dacă și numai dacă $b = +\infty$.

G.M. 6/2006
(Ovidiu Pop, Satu Mare)

Subiectul II.

Fie șirul $(I_n)_{n\geq 1}$, definit astfel:

$$I_n = \int_0^1 \frac{nx^n}{x^n+1}dx, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

a) Demonstrați că: $\ln(x+1) \leq x,\ \ \forall x \in (-1;+\infty)$;

b) Calculați I_1 și I_2;

c) Demonstrați că șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ are limită și aflați limita sa;

d) Demonstrați că șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător.

***

Subiectul III.

Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația:

$$x^4 - (8+8i)x^3 + 48ix^2 + (64-64i)x - 65 = 0$$

și arătați că rădăcinile ei sunt afixele vârfurilor unui pătrat.

Subiectul IV.

Fie $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă, cu derivata continuă și cu $f(0) = 0$.

Să se arate că: $e \cdot f^2(1) \leq 2 \cdot \int_0^1 e^x f^2(x)dx + \int_0^1 e^x (f'(x))^2 dx$.