CONCURSUL DE MATEMATICĂ ”MIRCEA GANGA”

Subiect - CLASA a XI-a

Subiectul I.

$Fie\ a, b, c, d\ \in\ \mathbb{R}\ și$ matricea

$$M = \begin{pmatrix} a+b+c+d & a-b+c-d & a+b-c-d & a-b-c+d \\ a-b+c-d & -a-b-c-d & a-b-c+d & -a-b+c+d \\ a+b-c-d & -a+b+c-d & -a-b-c-d & a-b+c-d \\ a-b-c+d & a+b-c-d & -a+b-c+d & -a-b-c-d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$$

a) Aflați patru matrice $A, X, Y, Z\ \in\ \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ cu proprietatea că

$$M = aA + bA \cdot X + cA \cdot Y + dA \cdot Z$$

b) Calculați det(M)

Subiectul II.

Fie $A\ \in\ \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu $\det(A) = 1$.

a) Arătați că $A^2 - Tr(A) \cdot A + \det(A) \cdot I_2 = O_2\ (Hamilton - Cayley)$

b) Să se determine $Tr(A)$ dacă are loc egalitatea:

$$\det(A^2 - 3A + I_2) + \det(A^2 + A - I_2) = -3$$

SUPLIMENT G.M. 3/2014

Subiectul III.

Fie $f: (1, \infty) \to\ \mathbb{R}$; dată de $f_{(x)} = ln\left(\sqrt[8]{\frac{x-1}{x+1}}\right)$

a) Calculați $f_{(x)}^{(n)}$, unde $f^{(n)}$ reprezintă derivata de ordinul „n” a funcției f; $n \in \mathbb{N}^*$

b) Calculați

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cdot \frac{1}{(k-1)!} \cdot f_{(3)}^{(k)}$$

Subiectul IV.

Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq 1}$, cu $a_1 = 2b + 1, b \in \mathbb{R}^*$, care verifică relația: $nb(a_{n+1} - a_n) + (2b-1)a_{n+1} - (2b+1)a_n = 4(b-1)bn^2 + 4b(3b-2)n + 8b^2 - 2$, pentru orice $n \geq 1$

a) Arătați că există A, B, C ∈ $\mathbb{R}$ astfel încât: $a_n = An^2 + Bn + C$

b) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^2}$