COLEGIUL NATIONAL INOCHENTIE MICU CLAIN BLAJ

CONSILIUL JUDETEAN ALBA

CONCURSUL DE MATEMATICA
MIRCEA GANGA

Editia a VI-a
BLAJ, 9 MAI 2015

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ”MIRCEA GANGA”

Subiect - CLASA a X-a

Subiectul I.

Fie ecuația $\left(log_a 4\right)^a = 5^{a-4}, a > 1$

a) Demonstrați că există $b \in \mathbb{R}_+^*$ astfel încât $b^a = 625$ și $4^b = a^5$;
b) Rezolvați ecuația dată;
c) Aflați numărul b de la punctul a)

Subiectul II.

Fie $k \in \mathbb{N}^*$ un număr fixat. Să se găsească minimul expresiei $E = x! \cdot y!$, $x, y \in \mathbb{N}$ când avem $x + y = k$.

G.M. 3/1927,
Căpitan Gh. Nicolescu

Subiectul III.

Fie $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât $\cos(t_1 + t_2 + t_3) = 1$. Demonstrați că $\sqrt{a} \leq 6$, unde

$$a = [cost_1 + cost_2 + \cos t_3 + cos(t_1 + t_2) + cos(t_2 + t_3) + cos(t_3 + t_1)]^2 +$$
$$+[sint_1 + sint_2 + sin\, t_3 + sin(t_1 + t_2) + sin(t_2 + t_3) + sin(t_3 + t_1)]^2.$$

Subiectul IV.

Se dau numerele

$$A_n = (2p + 2)^n - (2p)^n - 2 \qquad \text{și}$$
$$B_n = (2p + 2)^n + (2p)^n - 2, \qquad pentru \quad n = 1,2,3, \ldots$$

unde p este un număr natural nenul fixat. Arătați că pentru $\forall n \in \mathbb{N}^*$ doar unul dintre numerele A_n și B_n se divide cu $(2p + 1)^2$.