COLEGIUL NATIONAL INOCHENTIE MICU CLAIN BLAJ

CONSILIUL JUDETEAN ALBA

**CONCURSUL DE MATEMATICA MIRCEA GANGA**

Editia a VI-a
BLAJ, 9 MAI 2015

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ”MIRCEA GANGA”

# Subiect - CLASA a IX-a

## Subiectul I.

Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale cu proprietatea:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n} = \frac{a_{n+1}}{3}, \text{oricare ar fi } n \in \mathbb{N}^*$$

a. Determinaţi termenul general al şirului $(a_n)_{n\geq 1}$.

b. Dacă $b_n = \frac{a_n}{n}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, demonstraţi că $(b_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică.

***

## Subiectul II.

Fie k un număr natural fixat, $k \geq 1$. Să se determine funcţiile $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ pentru care avem: $f(1) = k+1, f(2) = \frac{k+2}{2}, f(3) = \frac{k+3}{3}, \ldots, f(k-1) = \frac{2k-1}{k-1}, f(k) = 2$ şi $f(n+k) + \frac{1}{f(n)} = 2$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

## Subiectul III.

Fie $ABCD$ patrulater inscriptibil cu proprietatea $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 4\,\overrightarrow{AO}$, unde $O$ este centrul cercului circumscris patrulaterului $ABCD$.

a. Dacă $T$ este mijlocul lui $[AC]$ şi $S$ mijlocul lui $[BD]$ arătaţi că $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{SO}$.

b. Arătaţi că $ABCD$ este dreptunghi.

## Subiectul IV.

Dintr-un punct oarecare $M$ din interiorul unui triunghi echilateral $ABC$ se duc perpendicularele $MD, ME, MF$ pe laturile respective $BC, AC, AB$. Să se demonstreze că raportul $\frac{MD+ME+MF}{BD+CE+AF}$ este un număr iraţional.

GM 5-6/1950, A. Tralmac, Sankt Petersburg