CONCURSUL DE MATEMATICĂ „MIRCEA GANGA”

Subiect - CLASA a XII-a

1. Se consideră funcțiile $f_n:[0;1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=e^{ax}\cdot x^n$ unde $n\in\mathbb{N}^*$, iar $a\in(0;+\infty)$ fixat, şi şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ definit prin $I_n=\int_0^1 f_n(x)\,dx,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

a) Determinați o relație de recurență între I_{n+1} şi I_n.

b) Studiați convergența şirului $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}(n\cdot I_n)$

Ciprian Cipariu, Blaj

2. Un polinom $P(X;\lambda)\in\mathbb{R}[X]$, λ fiind un parametru real variabil ce intră în componența coeficienților polinomului, împărțit prin X^2+1 dă ca rest $-14X+\lambda-3$, împărțit prin $X+1$ dă ca rest $\lambda+13$ şi împărțit prin $X-1$ dă ca rest $\lambda-7$.

a) Să se afle care este restul împărțirii sale prin produsul $(X^2+1)(X+1)(X-1)$.

b) Dacă restul de la punctul a) este $R(X;\lambda)$, să se determine λ, cu condițiunea ca maximul restului să aibă valoarea 20.

I. Banciu

(Problema 2027, G.M. Nr. 3/1913)

3. Fie $(G;\cdot)$ un grup cu 5 elemente şi $f:(G;\cdot)\to(G;\cdot)$, $f(x)=x^3$ un automorfism al său. Demonstrați că $(G;\cdot)$ este grup abelian.

Romanța Ghiță, Ioan Ghiță, Blaj

4. Se dă o funcție continuă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, al cărei grafic este simetric în raport cu punctul $A(1;3)$. Să se calculeze integrala:

$$I=\int_{-3}^{5}\frac{f(x)}{x^2-2x+17}dx\ .$$

Petru Todor, Sebeş

Notă

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore. Fiecare subiect este punctat cu 7 puncte.