CONCURSUL DE MATEMATICĂ „MIRCEA GANGA”

Subiect - CLASA a XI-a

1. Calculați:

   a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$.

   b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\cdot\sqrt[n]{n}-(n-1)\cdot\sqrt[n-1]{n-1}\right)$

R. Ianculescu
(Problema 2042, G.M. Nr. 4/1913)

2. Se consideră funcția $f:(0;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{x^2}$ şi şirurile $(a_n)_{n\geq1}$, $(b_n)_{n\geq1}$, $(c_n)_{n\geq1}$ date de $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}f'(k);\ b_n=a_n-f(n)$ şi $c_n=a_n-f(n+1)$.

a) Demonstrați că $f'(k+1)<f(k+1)-f(k)<f'(k),\ \forall k\in(0;\infty)$.

b) Studiați monotonia şirurilor $(b_n)_{n\geq1}$ şi $(c_n)_{n\geq1}$.

* * *

3. Să se determine $n\in\mathbb{N},\ n\geq2$ astfel încât funcția $f:M_n(\mathbb{C})\to M_n(\mathbb{C}),\ f(A)=A^*$ să fie injectivă. A^* reprezintă adjuncta matricei A.

4. Fie a, b, c numere reale nenule date. Să se determine funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care verifică egalitatea: $a\cdot f(x)+b\cdot f([x])\cdot f(\{x\})=cx,\ x\in\mathbb{R}$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x şi $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a lui x.

Notă

Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru 3 ore. Fiecare subiect este punctat cu 7 puncte.