COLEGIUL NATIONAL INOCHENTIE MICU CLAIN BLAJ

CONCURSUL DE MATEMATICA
MIRCEA GANGA
Editia a III-a
BLAJ, 12 MAI 2012

CONCURSUL DE MATEMATICĂ „MIRCEA GANGA”

Subiect - CLASA a IX-a

1. Să se demonstreze inegalitățile:

   a) $(x+y)^3 \le 4(x^3+y^3)$, $\forall x, y \ge 0$

   b) $(x+y+z)^3 \le 12(x^3+y^3+z^3)$, $\forall x, y, z \ge 0$

2. În triunghiul *ABC, G* este centrul de greutate și *D* si *E* sunt puncte astfel încât $\overrightarrow{BD} = m \cdot \overrightarrow{CD}$, și $\overrightarrow{AE} = -\frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{BC}$, unde $m \in \mathbb{R}^*$.

   a) Să se determine $m \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $\overrightarrow{GD}$ si $\overrightarrow{AC}$ să fie coliniari.

   b) Pentru *m* determinat la a) să se demonstreze că *D, G* si *E* sunt coliniare.

3. Fie *ABCD* un patrulater oarecare convex și A_1, B_1, C_1, D_1 punctele ce împart în același sens laturile *AB, BC, CD* si respectiv *DA* în același raport k. Fie, de asemenea, *M, N, P, S* mijloacele laturilor *AB, BC, CD* si *DA*, iar M_1, N_1, P_1, S_1, respectiv mijloacele laturilor A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1 si D_1A_1.

   Să se demonstreze că:

   a) Figurile MM_1PP_1 si NN_1SS_1 sunt paralelograme.

   b) Cele patru diagonale ale acestor două paralelograme se întâlnesc în același punct.

   Al. Roșu
   (Problema 2089, G.M. 8/ 1913)

4. Fie $(a_n)_{n\ge1}$ o progresie aritmetică crescătoare de numere naturale; pentru fiecare $m \in \mathbb{N}^*$, definim mulțimea:

$$A_m = \left\{ \frac{a_{n-1}}{a_n} + m \frac{a_n}{a_{n+1}} \middle| m \in \mathbb{N} \right\}$$

   Să se arate ca mulțimile A_m nu au nici un element comun.

Notă

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore. Fiecare subiect este punctat cu 7 puncte.