COLEGIUL NAȚIONAL INOCHENTIE MICU CLAIN BLAJ

CONCURSUL DE MATEMATICA
MIRCEA GANGA
Editia I
BLAJ, 8 MAI 2010

100
2010
Anul Matematicii în Școala Românească
www.anulmatematicii.ro

CONCURSUL DE MATEMATICĂ „MIRCEA GANGA”

CLASA a XII-a

1. Fie

$$I_{n}=\int_{\frac{-\pi}{2^n}}^{\frac{\pi}{2^n}}(\cos nx cos^n x+\sin nx\cdot sin^n x)dx$$

$\forall n\in \boldsymbol{N},\ n\geq 1.$

   a) Calculați I_1 şi I_2 .
   b) Demonstrați că $(I_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi aflați limita sa.

(Prof. Romanța și Ioan Ghiță, Blaj)

2. Fie $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}, f(0)=0, f(x)\neq 0$ pentru $x\neq 0$, o funcție derivabilă pe $\boldsymbol{R}$.
Să se determine $a\in\boldsymbol{R}$ astfel încât funcția

$$g(x)=\begin{cases} f'(x)\cdot sin\frac{1}{f(x)} & ;\ x\neq 0\\ a & ; x=0\end{cases}$$

să admită primitive pe $\boldsymbol{R}$.

(Mircea Ganga)

3. Fie $k\geq 2$ un număr natural, fixat. Se consideră şirul de numere naturale $(a_n)_{n\geq 2}$ cu termenul general $a_n=(1+k+k^2+\cdots+k^n)^3-k^n$. Să se demonstreze că nici un termen al şirului $(a_n)_{n\geq 2}$ nu este prim.

(Prof. univ. dr. Dumitru Acu, Sibiu)

4. Fie $(G,\cdot)$ un grup cu 39 de elemente care admite un subgrup H, având 3 elemente şi proprietatea: $\forall x\in G,\ \forall y\in H$ avem $x\cdot y\cdot x^{-1}\in H$. Să se arate că G este un grup abelian.

(Prof. Petru Todor, Sebeş)

Notă

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore. Fiecare subiect este punctat cu 7 puncte.