COLEGIUL NAȚIONAL INOCHENTIE MICU CLAIN BLAJ

CONCURSUL DE MATEMATICA
MIRCEA GANGA
Editia I
BLAJ, 8 MAI 2010

100
2010
Anul Matematicii în Școala Românească
www.anulmatematicii.ro

CONCURSUL DE MATEMATICĂ „MIRCEA GANGA”

CLASA a IX-a

1. Să se arate că într-un triunghi dreptunghic ABC cu $m(< A) = 90°$ sunt adevărate inegalitățile:
   a) $1 \geq \sqrt{2 sinB sinC}$
   b) $[tg\ B + tg\ C] \geq 2$ unde pentru $x \in R$, $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x.
   c) In ce condiții avem inegalitatea $[tg\ B] + [tg\ C] \geq 2$?

(Mircea Ganga)

2. Fie $a, b \in \boldsymbol{R}, a, b > 0, a \neq b$.
   a) Demonstrați că are loc relația $4(a^2 + ab + b^2) > 3(a + b)^2$.
   b) Să se arate că dacă avem $2x + 3ay + a^3 = 0$ și $2x + 3by + b^3 = 0$ vom avea inegalitatea $x^2 + y^3 < 0$.

(problema 643 din G.M. 2/1901, A.G. Ioachimescu)

3. Demonstrați că pentru $\forall n \in \boldsymbol{N}, n \geq 3$, este adevărată inegalitatea
$$\frac{(n+1)^{2n}}{n} \geq 1 \cdot 6 \cdot 11 \cdot 16 \cdot \ldots \cdot (5n+1).$$

(prof. univ. dr. Dumitru Acu, Sibiu)

4. Fie ABCD un paralelogram și $E \in (AD)$ și $F \in (AB)$ astfel încât
$$\frac{DE}{EA} = \frac{AF}{FB}$$
   a) Demonstrați că centrul de greutate G al triunghiului CEF este pe BD.
   b) Dacă G’ este simetricul punctului G față de centrul O al paralelogramului și P este mijlocul lui CE atunci PG’ ||AD dacă și numai dacă DE=EA.

(prof. Romanța și Ioan Ghiță, Blaj)

Notă

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore. Fiecare subiect va fi punctat cu 7 puncte.